PART2　円のベクトル方程式

2 (1) 2 点 A(3, 0), B(1, 4) を直径の両端とする円の方程式をベクトルを利用して求めよ。

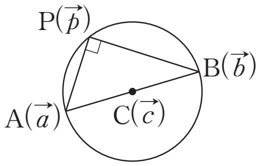
(2) △OAB において，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=4$ とする。点 A で直線 OA に接する円の中心 C が ∠AOB の二等分線 g 上にある。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくとき，$\vec{c}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

Point Pickup

(1) 中心 C$(\vec{c})$，半径 r の円のベクトル方程式は $|\vec{p}-\vec{c}|=r$

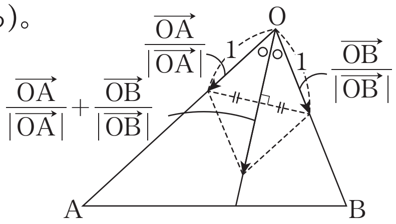
A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を直径の両端とする

円のベクトル方程式は $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$



(2) △OAB において，∠AOB の二等分線を表すベクトル方程式は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}\right)$$ (ただし k は実数とする)。



第11講　PART2　確認問題

1　2 点 A$(4,\ -1)$，B$(-2,\ -3)$ を直径の両端とする円の方程式をベクトルを利用して求めよ。

求める円上の点を P$(x,\ y)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\boxed{\text{ア}}$$

であり

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left(x-\boxed{\text{イ}},\ y+\boxed{\text{ウ}}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\left(x+\boxed{\text{エ}},\ y+\boxed{\text{オ}}\right)$$

であるから

$$\left(x-\boxed{\text{カ}}\right)^2+\left(y+\boxed{\text{キ}}\right)^2=\boxed{\text{クケ}}$$

2　$\triangle$OAB において，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=6$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=5$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=18$ とする。点 A で直線 OA に接する円の中心 C が $\angle$AOB の二等分線 g 上にある。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくとき，$\vec{c}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

$$\vec{c}=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\vec{b}$$

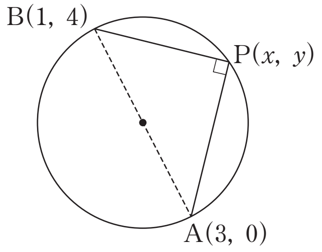
PART2　円のベクトル方程式

2　(1)　2 点 A(3, 0), B(1, 4) を直径の両端とする円の方程式をベクトルを利用して求めよ。

(2)　△OAB において，$|\overrightarrow{OA}|=3$，$|\overrightarrow{OB}|=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4$ とする。点 A で直線 OA に接する円の中心 C が ∠AOB の二等分線 g 上にある。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくとき，$\vec{c}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(1)　求める円上の点を P$(x,\ y)$ とすると

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0 \quad すなわち \quad \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$$



$\overrightarrow{AP}=(x-3,\ y)$，$\overrightarrow{BP}=(x-1,\ y-4)$ より

$$(x-3)(x-1)+y(y-4)=0$$

$$x^2-4x+y^2-4y+3=0$$

よって　$(x-2)^2+(y-2)^2=5$

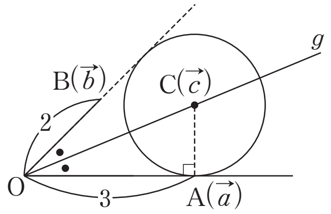
(2)　点 C は ∠AOB の二等分線 g 上にあるので

$$\vec{c}=k\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)=k\left(\frac{\vec{a}}{3}+\frac{\vec{b}}{2}\right)=\frac{k}{6}\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)\ (k\ は実数)$$

とおける。ここで $\frac{k}{6}=t$ とおくと

$$\vec{c}=t\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)\ (t\ は実数)$$

とおける。



CA ⊥ OA より　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OA}=0$　すなわち　$(\vec{a}-\vec{c})\cdot\vec{a}=0$

$$\left\{\vec{a}-\left(2t\vec{a}+3t\vec{b}\right)\right\}\cdot\vec{a}=0$$

$$|\vec{a}|^2-2t|\vec{a}|^2-3t\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$9-18t-12t=0 \qquad t=\frac{3}{10}$$

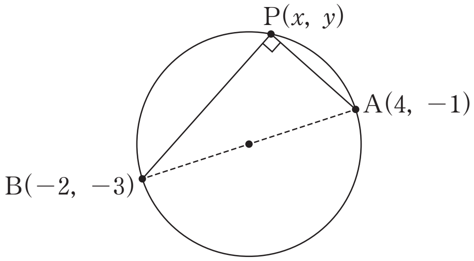
したがって　$\vec{c}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+\dfrac{9}{10}\vec{b}$

第 11 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：0，イ：4，ウ：1，エ：2，オ：3，
カ：1，キ：2，クケ：10

[解説]



求める円上の点を P$(x,\ y)$ とすると

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$　すなわち　$\overrightarrow{\mathbf{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{BP}}=\mathbf{0}$ [A]

$\overrightarrow{\mathbf{AP}}=(\boldsymbol{x}-\mathbf{4},\ \boldsymbol{y}+\mathbf{1})$，$\overrightarrow{\mathbf{BP}}=(\boldsymbol{x}+\mathbf{2},\ \boldsymbol{y}+\mathbf{3})$ より

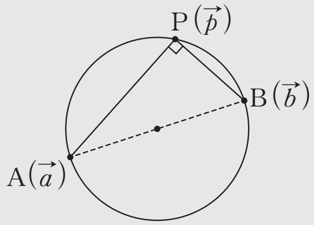
$$(x-4)(x+2)+(y+1)(y+3)=0$$

$$x^2-2x+y^2+4y-5=0$$

よって

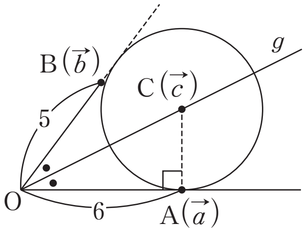
$$\boldsymbol{(x-1)^2+(y+2)^2=10}$$

[A]　2 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を直径の両端とする円のベクトル方程式は
$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$



2 ［正解］コ：5，サ：8，シ：3，ス：4

［解説］



点Cは ∠AOB の二等分線 g 上にあるから

$$\vec{c}=k\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)=k\left(\frac{\vec{a}}{6}+\frac{\vec{b}}{5}\right)$$ ［B］

$$=\frac{k}{30}(5\vec{a}+6\vec{b})\ (k\text{ は実数})$$

とおける。ここで，$\frac{k}{30}=t$ とおくと

$$\vec{c}=t(5\vec{a}+6\vec{b})\ (t\text{ は実数})$$

とおける。

CA ⊥ OA より　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OA}=0$

すなわち　$(\vec{a}-\vec{c})\cdot\vec{a}=0$

$$\{\vec{a}-t(5\vec{a}+6\vec{b})\}\cdot\vec{a}=0$$

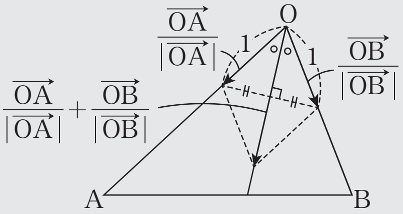
$$|\vec{a}|^2-5t|\vec{a}|^2-6t\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$36-5\times36t-6\times18t=0$$

よって　$t=\frac{1}{8}$

したがって　$\boldsymbol{\vec{c}=\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}}$

［B］　△OAB において，∠AOB の二等分線を表すベクトル方程式は

$$\overrightarrow{OP}=k\left(\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}+\frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}\right)$$

ただし，k は実数とする。